# Увод у Персистентну Хомологију

Филип Брођић

Математички Факултет , Универзитет у Београду

12. децембар 2018

# Садржај

1. Алгебарска Топологија
2. Персистенција
3. Персистентна Хомологија
4. *Rips*-ов комплекс
5. Литература

# Садржај

1 Алгебарска Топологија

2 Персистенција

3 Персистентна Хомологија

4 *Rips*-ов комплекс

5 Литература

# Зашто?

$Top$

# Зашто?

$$Top \longrightarrow Ch$$

# Зашто?

$$Top \longrightarrow Ch \longrightarrow Ab$$

# Зашто?

$$Top \longrightarrow Ch \longrightarrow Ab$$

$$X$$

# Зашто?

$$Top \longrightarrow Ch \longrightarrow Ab$$

$$X \longrightarrow C_*(X)$$

# Зашто?

$$Top \longrightarrow Ch \longrightarrow Ab$$

$$X \longrightarrow C_*(X) \longrightarrow H_n(X)$$

# Зашто?

$$Top \longrightarrow Ch \longrightarrow Ab$$

$$X \longrightarrow C_*(X) \longrightarrow H_n(X)$$

Различитим Абеловим групама одговарају различити простори!

# Симплицијални комплекси

Нас неће занимати апстрактни тополошки простори, већ неки геометријски једноставнији објекти, који су погоднији за рачунарске технике:

## Симплицијални комплекси

Нас неће занимати апстрактни тополошки простори, већ неки геометријски једноставнији објекти, који су погоднији за рачунарске технике:

### Дефиниција

Стандардни $n$ - симплекс је скуп свих конвексних комбинација базних вектора у $\mathbb{R}^{n+1}$.

## Симплицијални комплекси

Нас неће занимати апстрактни тополошки простори, већ неки геометријски једноставнији објекти, који су погоднији за рачунарске технике:

### Дефиниција

Стандардни $n$ - симплекс је скуп свих конвексних комбинација базних вектора у $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$\sigma_n := \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \ x_1 + x_2 + ... + x_{n+1} = 1 \quad \wedge \quad \forall i \ x_i \geq 0\}$$

# Симплицијални комплекси

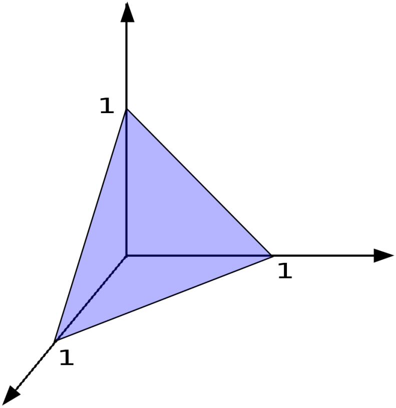
Нас неће занимати апстрактни тополошки простори, већ неки геометријски једноставнији објекти, који су погоднији за рачунарске технике:

## Дефиниција

Стандардни $n$ - симплекс је скуп свих конвексних комбинација базних вектора у $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$\sigma_n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \; x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} = 1 \quad \wedge \quad \forall i \; x_i \geq 0\}$$

# Симплицијални комплекси




Слика: Стандардни 2-симплекс

# Симплицијални комплекси

**Дефиниција**

Симплицијални комплекс $\mathcal{K}$ је скуп симплекса који испуњава:

# Симплицијални комплекси

**Дефиниција**

Симплицијални комплекс $\mathcal{K}$ је скуп симплекса који испуњава:

1) Свака *страна* симплекса $\sigma$ из $\mathcal{K}$ припада такође $\mathcal{K}$,

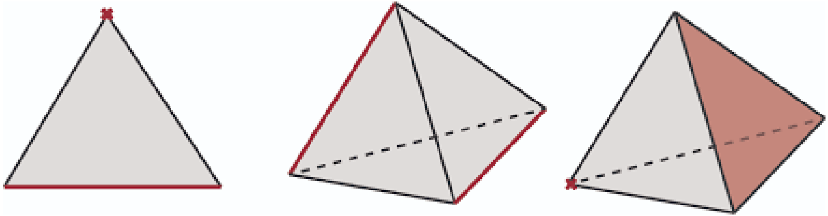
# Симплицијални комплекси

## Дефиниција

Симплицијални комплекс $\mathcal{K}$ је скуп симплекса који испуњава:

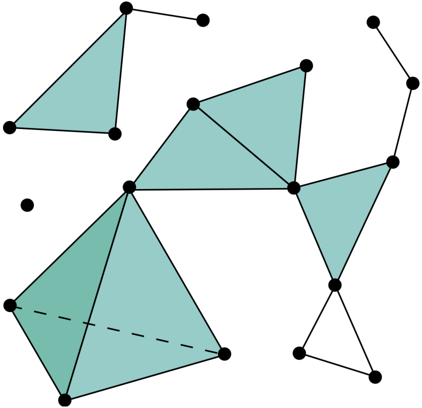
1) Свака *страна* симплекса $\sigma$ из $\mathcal{K}$ припада такође $\mathcal{K}$,
2) За свака два симплекса $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{K}$ њихов пресек $\sigma_1 \cap \sigma_2$ је страна од $\sigma_1$ и $\sigma_2$.

# Симплицијални комплекси



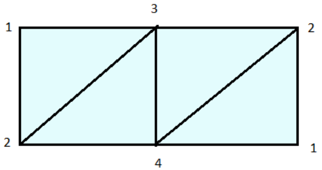
Слика: Страна симплекса

# Симплицијални комплекси



Слика: Симплицијални комплес

# Симплицијални комплекси




Слика: Пример простора који НИЈЕ симплицијални комплекс

## Симплицијални комплекси

Постоји природна филтрација симплицијалних комплекса дата са:

# Симплицијални комплекси

Постоји природна филтрација симплицијалних комплекса дата са:

## Дефиниција

$n$-ти скелетон симплицијалног комплекса $\mathcal{K}$ je:

# Симплицијални комплекси

Постоји природна филтрација симплицијалних комплекса дата са:

## Дефиниција

$n$-ти скелетон симплицијалног комплекса $\mathcal{K}$ је:

$$\mathcal{K}_n := \{\sigma \in \mathcal{K} | \ \sigma \text{ je } k \text{ симплекс}, \ k \leq n\}.$$

# Симплицијални комплекси

Постоји природна филтрација симплицијалних комплекса дата са:

**Дефиниција**

$n$-ти скелетон симплицијалног комплекса $\mathcal{K}$ је:

$$\mathcal{K}_n := \{\sigma \in \mathcal{K} | \ \sigma \text{ је } k \text{ симплекс}, \ k \leq n\}.$$

Лако се види да важи

$$\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{K}_n \subset \cdots$$

# Симплицијални комплекси

Постоји природна филтрација симплицијалних комплекса дата са:

## Дефиниција

$n$-ти скелетон симплицијалног комплекса $\mathcal{K}$ је:

$$\mathcal{K}_n := \{\sigma \in \mathcal{K} | \ \sigma \text{ је } k \text{ симплекс}, \ k \leq n\}.$$

Лако се види да важи

$$\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{K}_n \subset \cdots$$

За симплицијални комплекс кажемо да је коначан, ако је сваки $\mathcal{K}_n$ коначан и ако важи $\mathcal{K}_n \setminus \mathcal{K}_{n-1} = \emptyset \quad , n \geq k$.

# Симплицијални комплекси

Постоји природна филтрација симплицијалних комплекса дата са:

## Дефиниција

$n$-ти скелетон симплицијалног комплекса $\mathcal{K}$ је:

$$\mathcal{K}_n := \{\sigma \in \mathcal{K} | \ \sigma \text{ je } k \text{ симплекс}, \ k \leq n\}.$$

Лако се види да важи

$$\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{K}_n \subset \cdots$$

За симплицијални комплекс кажемо да је коначан, ако је сваки $\mathcal{K}_n$ коначан и ако важи $\mathcal{K}_n \setminus \mathcal{K}_{n-1} = \emptyset \quad , n \geq k$. Тада је добро дефинисана димензија

$$dim(\mathcal{K}) := max\{n \in \mathbb{N} | \ \mathcal{K}_n \setminus \mathcal{K}_{n-1} \neq \emptyset\}$$

## Симплицијална Хомологија

Ради једноставности излагања увешћемо симплицијалну хомологију са коефицијентима у $\mathbb{Z}_2$

# Симплицијална Хомологија

Ради једноставности излагања увешћемо симплицијалну хомологију са коефицијентима у $\mathbb{Z}_2$

## Дефиниција

Ланчасти комплекс

$$C_*(\mathcal{K}) = \bigoplus_{n \geq 0} C_n(\mathcal{K})$$

придружен симплицијалном комплексу $\mathcal{K}$ је низ група:

# Симплицијална Хомологија

Ради једноставности излагања увешћемо симплицијалну хомологију са коефицијентима у $\mathbb{Z}_2$

## Дефиниција

Ланчасти комплекс

$$C_*(\mathcal{K}) = \bigoplus_{n \geq 0} C_n(\mathcal{K})$$

придружен симплицијалном комплексу $\mathcal{K}$ је низ група:

$$C_n(\mathcal{K}) := \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{K}_n \setminus \mathcal{K}_{n-1}} \mathbb{Z}_2 < \sigma >$$

# Симплицијална Хомологија

Да бисмо од датог низа група добили групе које су инваријанте наших простора потребно је дефинисати гранични хомоморфизам

# Симплицијална Хомологија

Да бисмо од датог низа група добили групе које су инваријанте наших простора потребно је дефинисати гранични хомоморфизам

$$\partial_n : C_n(\mathcal{K}) \to C_{n-1}(\mathcal{K})$$

# Симплицијална Хомологија

Да бисмо од датог низа група добили групе које су инваријанте наших простора потребно је дефинисати гранични хомоморфизам

$$\partial_n : C_n(\mathcal{K}) \to C_{n-1}(\mathcal{K})$$

Са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима дефиниција је врло једноставна

$$\partial\sigma := \sum_{\tau \in \mathcal{K}_{n-1} \setminus \mathcal{K}_{n-2}, \tau \subset \sigma} \tau$$

Када су коефицијенти у $\mathbb{Z}$ потребно је разматрати оријентације граничних симплекса и придружити им знак.

# Симплицијална Хомологија

Стандардно тврђење из Алгебарске Топологије је

# Симплицијална Хомологија

Стандардно тврђење из Алгебарске Топологије је

## Тврђење

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$$

# Симплицијална Хомологија

Стандардно тврђење из Алгебарске Топологије је

**Тврђење**

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$$

Одатле можемо да закључимо да је $Im\partial_{n+1} \subset Ker\partial_n$, како су то Абелове групе, количник је добро дефинисан:

# Симплицијална Хомологија

Стандардно тврђење из Алгебарске Топологије је

## Тврђење

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$$

Одатле можемо да закључимо да је $Im\partial_{n+1} \subset Ker\partial_n$, како су то Абелове групе, количник је добро дефинисан:

## Дефиниција

Нека је $\mathcal{K}$ симплицијални комплекс. Тада је $n$-та хомолошка група симплицијалног комплекса $\mathcal{K}$:

# Симплицијална Хомологија

Стандардно тврђење из Алгебарске Топологије је

## Тврђење

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$$

Одатле можемо да закључимо да је $Im\partial_{n+1} \subset Ker\partial_n$, како су то Абелове групе, количник је добро дефинисан:

## Дефиниција

Нека је $\mathcal{K}$ симплицијални комплекс. Тада је $n$-та хомолошка група симплицијалног комплекса $\mathcal{K}$:

$$H_n(\mathcal{K}) := \frac{Ker(\partial_n : C_n \to C_{n-1})}{Im(\partial_{n+1} : C_{n+1} \to C_n)}$$

# Симплицијална Хомологија

## Пример

Нека је $\mathcal{K}$ 1-симплекс тада је

$$H_*(\mathcal{K}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , * = 0, \\ 0 & , * \geq 1. \end{cases}$$

# Симплицијална Хомологија

## Пример

Нека је $\mathcal{K}$ 1-симплекс тада је

$$H_*(\mathcal{K}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , * = 0, \\ 0 & , * \geq 1. \end{cases}$$

Заиста, означимо са $[e_1, e_2]$ 1-симплекс генерисан векторима $e_1$ и $e_2$.

$$C_*(\mathcal{K}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 < e_1 > \oplus \mathbb{Z}_2 < e_2 > & , * = 0, \\ & \\ & \end{cases}$$

# Симплицијална Хомологија

## Пример

Нека је $\mathcal{K}$ 1-симплекс тада је

$$H_*(\mathcal{K}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , * = 0, \\ 0 & , * \geq 1. \end{cases}$$

Заиста, означимо са $[e_1, e_2]$ 1-симплекс генерисан векторима $e_1$ и $e_2$.

$$C_*(\mathcal{K}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 < e_1 > \oplus \mathbb{Z}_2 < e_2 > & , * = 0, \\ \mathbb{Z}_2 < [e_1, e_2] > & , * = 1, \\ & \end{cases}$$

# Симплицијална Хомологија

## Пример

Нека је $\mathcal{K}$ 1-симплекс тада је

$$H_*(\mathcal{K}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , * = 0, \\ 0 & , * \geq 1. \end{cases}$$

Заиста, означимо са $[e_1, e_2]$ 1-симплекс генерисан векторима $e_1$ и $e_2$.

$$C_*(\mathcal{K}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 < e_1 > \oplus \mathbb{Z}_2 < e_2 > & , * = 0, \\ \mathbb{Z}_2 < [e_1, e_2] > & , * = 1, \\ 0 & , * \geq 1. \end{cases}$$

# Симплицијална Хомологија

## Пример

Нека је $\mathcal{K}$ 1-симплекс тада је

$$H_*(\mathcal{K}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , * = 0, \\ 0 & , * \geq 1. \end{cases}$$

Заиста, означимо са $[e_1, e_2]$ 1-симплекс генерисан векторима $e_1$ и $e_2$.

$$C_*(\mathcal{K}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 < e_1 > \oplus \mathbb{Z}_2 < e_2 > & , * = 0, \\ \mathbb{Z}_2 < [e_1, e_2] > & , * = 1, \\ 0 & , * \geq 1. \end{cases}$$

$$\partial_0(e_1) = \partial_0(e_2) = 0 \quad , \quad \partial_1([e_1, e_2]) = e_1 + e_2$$

# Симплицијална Хомологија

## Пример

како је $Ker\partial_1 = 0$ имамо да је

$$H_1(\mathcal{K}) = 0.$$

Пошто је $C_i = 0, \quad i \geq 2$ онда важи и $H_i = 0$.

# Симплицијална Хомологија

## Пример

како је $Ker\partial_1 = 0$ имамо да је

$$H_1(\mathcal{K}) = 0.$$

Пошто је $C_i = 0, \quad i \geq 2$ онда важи и $H_i = 0$.
Имајући у виду да је $Im\partial_1 = \mathbb{Z}_2 < e_1 + e_2 >$ добијамо

$$H_0(\mathcal{K}) = \frac{\mathbb{Z}_2 < e_1 > \oplus \mathbb{Z}_2 < e_2 >}{\mathbb{Z}_2 < e_1 + e_2 >} \cong \mathbb{Z}_2$$

## *Smith*-ова нормална форма и алгоритам

Гранични оператор $\partial_n$ може да се посматра и као линеарно пресликавање $\mathbb{Z}_2$ векторских простора дато са:

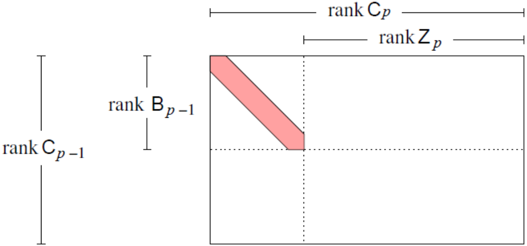
# *Smith*-ова нормална форма и алгоритам

Гранични оператор $\partial_n$ може да се посматра и као линеарно пресликавање $\mathbb{Z}_2$ векторских простора дато са:

$$(D_n)_{i,j} = \begin{cases} 1 & , i\text{-ти } n-1 \text{ симплекс је граница } j\text{-тог } n \text{ симплекса} \\ 0 & , \text{иначе.} \end{cases}$$

где све матрице зависе од уређења коначног броја $n$-симплекса. Свака матрица се елементарним трансформацијама може свести на "дијагоналну" матрицу:

## *Smith*-ова нормална форма и алгоритам




Слика: *Smith*-ова нормална форма

## *Smith*-ова нормална форма

Ако пажљиво погледамо $rank(D_n) = dim(Im\partial_n)$. А из теореме о рангу и дефекту имамо да је и

$$dim(C_n) = dim(Im\partial_n) + dim(Ker\partial_n)$$

односно имајући у виду да је добијамо да је

$$dim(H_n(\mathcal{K})) = dim(C_n) - rank(D_n) - rank(D_{n+1})$$

што нам даје једноставан начин да разликујемо хомолошке групе а тиме и просторе.

### Напомена

Бројеви:

$$\beta_n := dim(H_n(\mathcal{K}))$$

се називау *Betti*-јеви бројеви.

## *Smith*-ова нормална форма и алгоритам

Посматрајмо сада симплицијални комплекс $\mathcal{K}$ и уредимо симплексе

$$\sigma_1, \sigma_2, \ \ldots \ , \sigma_m$$

тако да страна неког симплекса претходи сам симплекс.

## *Smith*-ова нормална форма и алгоритам

Посматрајмо сада симплицијални комплекс $\mathcal{K}$ и уредимо симплексе

$$\sigma_1, \sigma_2, \ . \ . \ . \ , \sigma_m$$

тако да страна неког симплекса претходи сам симплекс.Дефинишимо сада обједињени оператор

$$D_{i,j} = \begin{cases} 1 & , \text{ако је } \sigma_i \text{ страна кодимензије 1 симплекса } \sigma_j \\ 0 & , \text{иначе.} \end{cases}$$

# *Smith*-ова нормална форма и алгоритам

Ако дефинишемо $low(j)$ као број најниже не-нула врсте, а $low(j) = 0$ акко је $j$-та колона цела 0. Следећим алгоритмом оператор $D$ сводимо на матрицу која у свакој колони и свакој врсти има највише једну 1.

# *Smith*-ова нормална форма и алгоритам

Ако дефинишемо $low(j)$ као број најниже не-нула врсте, а $low(j) = 0$ акко је $j$-та колона цела 0. Следећим алгоритмом оператор $D$ сводимо на матрицу која у свакој колони и свакој врсти има највише једну 1.

for $j = 1$ to $n$ do
  while $\exists j' < j$ with $low(j') = low(j)$ do
    add column $j'$ to column $j$
  endwhile
endfor.

Из редуковане матрице није тешко прочитати *Betti*-јеве бројеве.

# Садржај

1. Алгебарска Топологија
2. Персистенција
3. Персистентна Хомологија
4. *Rips*-ов комплекс
5. Литература

# Морсове функције

У овом делу ћемо уочити како у глатком случају топологију простора можемо да ”читамо”помоћу лепих функција на тим просторима.

# Морсове функције

У овом делу ћемо уочити како у глатком случају топологију простора можемо да "читамо" помоћу лепих функција на тим просторима.

**Дефиниција**

Глатка многострукост $M$ је $n$-димензионо уопштење површи. Односно, свака тачка има околину дифеоморфну са $\mathbb{R}^n$.

# Морсове функције

У овом делу ћемо уочити како у глатком случају топологију простора можемо да "читамо" помоћу лепих функција на тим просторима.

**Дефиниција**

Глатка многострукост $M$ је $n$-димензионо уопштење површи. Односно, свака тачка има околину дифеоморфну са $\mathbb{R}^n$.

Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ функција класе $C^2(M)$. Кажемо да је критична тачка $p$ $(df(p) = 0)$ недегенерисана уколико је Хесијан:

# Морсове функције

У овом делу ћемо уочити како у глатком случају топологију простора можемо да "читамо" помоћу лепих функција на тим просторима.

## Дефиниција

Глатка многострукост $M$ је $n$-димензионо уопштење површи. Односно, свака тачка има околину дифеоморфну са $\mathbb{R}^n$.

Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ функција класе $C^2(M)$. Кажемо да је критична тачка $p$ $(df(p) = 0)$ недегенерисана уколико је Хесијан:

$$D^2 f = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j}$$

# Морсове функције

У овом делу ћемо уочити како у глатком случају топологију простора можемо да "читамо" помоћу лепих функција на тим просторима.

**Дефиниција**

Глатка многострукост $M$ је $n$-димензионо уопштење површи. Односно, свака тачка има околину дифеоморфну са $\mathbb{R}^n$.

Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ функција класе $C^2(M)$. Кажемо да је критична тачка $p$ $(df(p) = 0)$ недегенерисана уколико је Хесијан:

$$D^2 f = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j}$$

инвертибилан.

# Морсове функције

## Дефиниција

Функција $f : M \to \mathbb{R}$ класе $C^2(M)$ је *Морсова* ако су све критичне тачке функције $f$ недегенерисане.

# Морсове функције

## Дефиниција

Функција $f : M \to \mathbb{R}$ класе $C^2(M)$ је *Морсова* ако су све критичне тачке функције $f$ недегенерисане.
Индекс $m_f(p)$ критичне тачке $p$ функције $f$ је број негативних сопствених вредности Хесијана $D^2 f(p)$.

# Морсове функције

## Дефиниција

Функција $f : M \to \mathbb{R}$ класе $C^2(M)$ је *Морсова* ако су све критичне тачке функције $f$ недегенерисане.
Индекс $m_f(p)$ критичне тачке $p$ функције $f$ је број негативних сопствених вредности Хесијана $D^2 f(p)$.

Једноставна последица Теореме о Инверзној функцији нам говори да су критичне тачке изоловане.

# Морсове функције

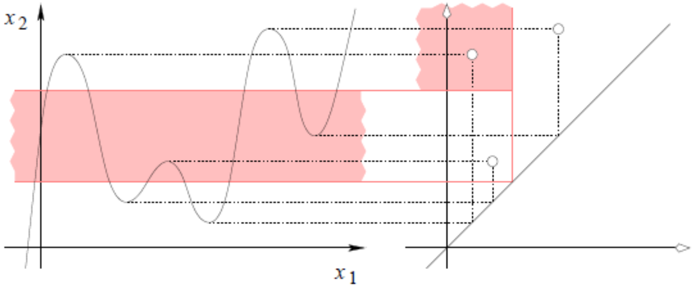
## Дефиниција

Функција $f : M \to \mathbb{R}$ класе $C^2(M)$ је *Морсова* ако су све критичне тачке функције $f$ недегенерисане.
Индекс $m_f(p)$ критичне тачке $p$ функције $f$ је број негативних сопствених вредности Хесијана $D^2 f(p)$.

Једноставна последица Теореме о Инверзној функцији нам говори да су критичне тачке изоловане.
Подниво функције $f$ је

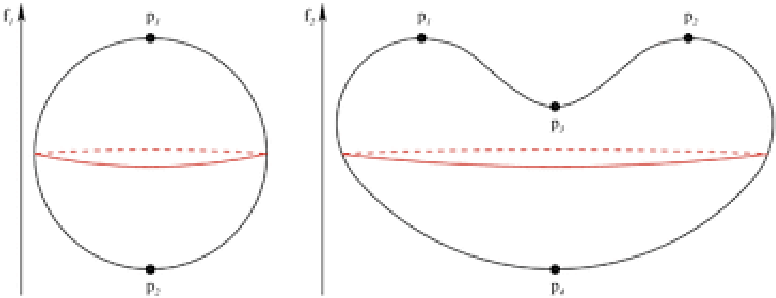
$$f^{\leq t} := \{p \in M |\ f(p) \leq t\}$$

# Морсове функције




Слика: Пример Морсове функције

# Морсове функције



Слика: Пример Морсове функције 2

# *Bottleneck* растојање

Проласком кроз локални минимум у реалном случају рађа се једна класа повезаности. Уколико бележимо када се класа родила и када је класа нестала (Слика : Пример Морсове функције) добијамо *Персистентни* дијаграм функције.

# *Bottleneck* растојање

Проласком кроз локални минимум у реалном случају рађа се једна класа повезаности. Уколико бележимо када се класа родила и када је класа нестала (Слика : Пример Морсове функције) добијамо *Персистентни* дијаграм функције.
За две различите функције имамо два различита персистентна дијаграма која могу да се упореде на следећи начин:

# *Bottleneck* растојање

Проласком кроз локални минимум у реалном случају рађа се једна класа повезаности. Уколико бележимо када се класа родила и када је класа нестала (Слика : Пример Морсове функције) добијамо *Персистентни* дијаграм функције.
За две различите функције имамо два различита персистентна дијаграма која могу да се упореде на следећи начин:

## Дефиниција

$$d_{bottle}(f,g) = inf_{\mu} sup_{x \in Dgm(f)} ||x - \mu(x)||_{\infty}$$

Где су $\mu$ бијекције између дијаграма (приметимо да су кардиналности $Dgm(f)$ и $Dgm(g)$ различите!).

# *Bottleneck* растојање

Важна Теорема у овој теорији је:

**Теорема**

$$d_{bottle}(f, g) \leq ||f - g||_\infty$$

# *Bottleneck* растојање

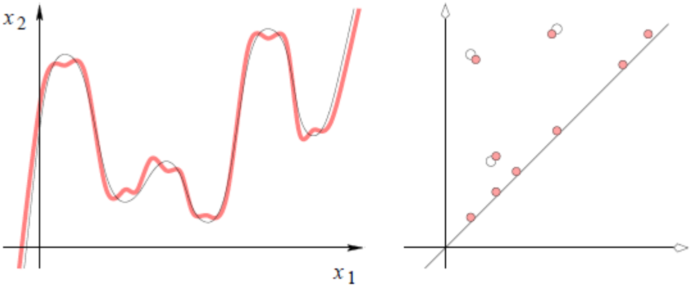
Важна Теорема у овој теорији је:

**Теорема**

$$d_{bottle}(f, g) \leq ||f - g||_\infty$$

Односно, уколико мало пертурбујемо компликовану функцију, можемо наћи функцију чији је дијаграм једноставнији, а даје нам исту количину информација!

## *Bottleneck* растојање




Слика: *Bottleneck* растојање две блиске функције

# Садржај

1 Алгебарска Топологија

2 Персистенција

3 Персистентна Хомологија

4 *Rips*-ов комплекс

5 Литература

# Мотивација

У Морсове функције су нам била само мотивација, иако се око нас често појављују многострукости као амбијенти постоји тврђење:

**Тврђење (Триангулација глатких многострукости)**

Нека је $M$ глатка затворена многострукост тада постоји коначан симплицијални комплекс $\mathcal{K}$ такав да су $M$ и $|\mathcal{K}|$ хомеоморфни.

# Мотивација

У Морсове функције су нам била само мотивација, иако се око нас често појављују многострукости као амбијенти постоји тврђење:

**Тврђење (Триангулација глатких многострукости)**

Нека је $M$ глатка затворена многострукост тада постоји коначан симплицијални комплекс $\mathcal{K}$ такав да су $M$ и $|\mathcal{K}|$ хомеоморфни.

Односно, како нас занимају само облици, не нужно и глатка структура, ово тврђење нам омогућује да проблемима приступимо тако што облике описујемо дискретним, комбинаторним објектима, са којима је лако рачунати.

## *Tame* функције

За потребу дефиниције Персистентне хомологије уводимо функције које особинама подсећају на Морсове.

# *Tame* функције

За потребу дефиниције Персистентне хомологије уводимо функције које особинама подсећају на Морсове.

## Дефиниција

Функција $f : X \to \mathbb{R}$ је *tame* ако важи:

# *Tame* функције

За потребу дефиниције Персистентне хомологије уводимо функције које особинама подсећају на Морсове.

**Дефиниција**

Функција $f : X \to \mathbb{R}$ је *tame* ако важи:

1) Хомологија сваког од простора $X_t = f^{-1}(-\infty, t]$ је коначне димензије (ранга, ако не радимо са $\mathbb{Z}_2$),

# *Tame* функције

За потребу дефиниције Персистентне хомологије уводимо функције које особинама подсећају на Морсове.

## Дефиниција

Функција $f : X \to \mathbb{R}$ је *tame* ако важи:

1) Хомологија сваког од простора $X_t = f^{-1}(-\infty, t]$ је коначне димензије (ранга, ако не радимо са $\mathbb{Z}_2$),
2) Постоји само коначно много вредности $t_1 < \cdots < t_n$ за које хомологије простора $H_*(X_{t_i})$ нису изоморфне.

## *Tame* функције и симплицијални комплекси

Нама најважнији пример су део по део линеарне функције из симплицијалних комплекса $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$.

# *Tame* функције и симплицијални комплекси

Нама најважнији пример су део по део линеарне функције из симплицијалних комплекса $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$.
Довољно је дефинисати функцију не теменима и продужити линеарно, нека су $v_1, ..., v_n$ темена и претпоставимо да важи

$$f(v_1) < f(v_2) < \cdots < f(v_n)$$

## *Tame* функције и симплицијални комплекси

Нама најважнији пример су део по део линеарне функције из симплицијалних комплекса $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$.
Довољно је дефинисати функцију не теменима и продужити линеарно, нека су $v_1, ..., v_n$ темена и претпоставимо да важи

$$f(v_1) < f(v_2) < \cdots < f(v_n)$$

подниво $f^{-1}(-\infty, t]$ функције $f$ је *хомотопски еквивалентан* максималном симплицијалном подкомплексу генерисаном теменима $v_1, ..., v_i$ , за $t \in [f(v_i), f(v_{i+1}))$.
Како је хомологија *хомотопска* инваријанта, добро је дефинисана Симплицијална хомологија сваког поднивоа.

# Пример *tame* функције

## Пример

Посматрајмо троугао са теменима $v_0, v_1, v_2$ као симплицијални комплекс.

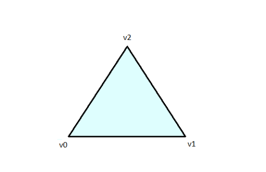
# Пример *tame* функције

## Пример

Посматрајмо троугао са теменима $v_0, v_1, v_2$ као симплицијални комплекс.

Нека је $f(v_0) = 0, f(v_1) = 1, f(v_2) = 2$. Тада је

$$f(x) = tf(v_i) + (1-t)f(v_j) \quad \text{ако је } x = tv_i + (1-t)v_j$$




Слика: Троугао

# Персистентна Хомологија

Ако је $X$ тополошки простор (симплицијални комплекс) и $f$ *tame* функција са "критичним вредностима" $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.

## Дефиниција

Фиксирајмо вредности $s_0 < t_1 < s_1 < t_2 < \cdots < t_n < s_n$. Означимо инклузију из $X_{s_i}$ у $X_{s_j}$ за $i < j$ са $f^{i,j}$.

# Персистентна Хомологија

Ако је $X$ тополошки простор (симплицијални комплекс) и $f$ *tame* функција са "критичним вредностима" $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.

## Дефиниција

Фиксирајмо вредности $s_0 < t_1 < s_1 < t_2 < \cdots < t_n < s_n$. Означимо инклузију из $X_{s_i}$ у $X_{s_j}$ за $i < j$ са $f^{i,j}$. Непрекидно пресликавање индукује пресликавање у хомологији

$$f_p^{i,j} : H_p(X_{s_i}) \to H_p(X_{s_j})$$

# Персистентна Хомологија

Ако je $X$ тополошки простор (симплицијални комплекс) и $f$ *tame* функција са "критичним вредностима" $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.

## Дефиниција

Фиксирајмо вредности $s_0 < t_1 < s_1 < t_2 < \cdots < t_n < s_n$. Означимо инклузију из $X_{s_i}$ у $X_{s_j}$ за $i < j$ са $f^{i,j}$. Непрекидно пресликавање индукује пресликавање у хомологији

$$f_p^{i,j} : H_p(X_{s_i}) \to H_p(X_{s_j})$$

*Персистентна хомологија* je $Imf_p^{i,j}$

# Персистентна Хомологија

Ако је $X$ тополошки простор (симплицијални комплекс) и $f$ *tame* функција са "критичним вредностима" $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.

## Дефиниција

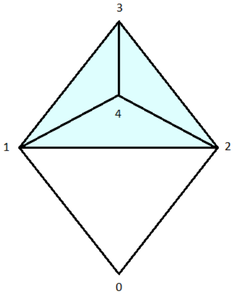
Фиксирајмо вредности $s_0 < t_1 < s_1 < t_2 < \cdots < t_n < s_n$. Означимо инклузију из $X_{s_i}$ у $X_{s_j}$ за $i < j$ са $f^{i,j}$. Непрекидно пресликавање индукује пресликавање у хомологији

$$f_p^{i,j} : H_p(X_{s_i}) \to H_p(X_{s_j})$$

*Персистентна хомологија* је $Imf_p^{i,j}$

Ове групе садрже класе које су настале пре $s_i$ а и даље живе у $s_j$. Зато се зове *Персистентна Хомологија* јер мери *истрајност* класа у поднивоима.

# Пример




Слика: Пример за Персистентну Хомологију

# Пример

## Пример

Нека je $s_i = \frac{2i-1}{2}$.

# Пример

## Пример

Нека je $s_i = \frac{2i-1}{2}$.

$$f_1^{3,4} : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

# Пример

## Пример

Нека je $s_i = \frac{2i-1}{2}$.

$$f_1^{3,4} : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \quad , Imf_1^{3,4} = \mathbb{Z}_2$$

# Пример

## Пример

Нека је $s_i = \frac{2i-1}{2}$.

$$f_1^{3,4} : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \quad , Imf_1^{3,4} = \mathbb{Z}_2$$

$$f_1^{3,5} : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$$

# Пример

## Пример

Нека je $s_i = \frac{2i-1}{2}$.

$$f_1^{3,4} : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \quad , Imf_1^{3,4} = \mathbb{Z}_2$$

$$f_1^{3,5} : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \qquad , Imf_1^{3,5} = \mathbb{Z}_2$$

# Пример

## Пример

Нека je $s_i = \frac{2i-1}{2}$.

$$f_1^{3,4} : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \quad , Imf_1^{3,4} = \mathbb{Z}_2$$

$$f_1^{3,5} : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \qquad , Imf_1^{3,5} = \mathbb{Z}_2$$

$$f^{4,5} : \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$$

# Пример

## Пример

Нека je $s_i = \frac{2i-1}{2}$.

$$f_1^{3,4} : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \quad , Imf_1^{3,4} = \mathbb{Z}_2$$

$$f_1^{3,5} : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \qquad , Imf_1^{3,5} = \mathbb{Z}_2$$

$$f^{4,5} : \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \quad , Imf_1^{3,4} = \mathbb{Z}_2$$

# Садржај

1 Алгебарска Топологија

2 Персистенција

3 Персистентна Хомологија

4 *Rips*-ов комплекс

5 Литература

# Дефиниција

Рипсов комплекс је симплицијални комплекс придружен $m$-торки тачака у $\mathbb{R}^n$ (или неком другом метричком простору).

# Дефиниција

Рипсов комплекс је симплицијални комплекс придружен $m$-торки тачака у $\mathbb{R}^n$ (или неком другом метричком простору).

## Дефиниција

Нека су $x_1, \ldots, x_m$ из $\mathbb{R}^n$ и $\epsilon > 0$. Рипсов комплекс (или Вијеторис-Рипсов комплекс) је апстрактни симплицијални комплекс $\mathcal{R}_\epsilon$ где су $k$-симплекси $k$-торке тачака $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ такве да су сваке две тачке на растојању мањем од $\epsilon$.

# Дефиниција

Рипсов комплекс је симплицијални комплекс придружен $m$-торки тачака у $\mathbb{R}^n$ (или неком другом метричком простору).

## Дефиниција

Нека су $x_1, \ldots, x_m$ из $\mathbb{R}^n$ и $\epsilon > 0$. Рипсов комплекс (или Вијеторис-Рипсов комплекс) је апстрактни симплицијални комплекс $\mathcal{R}_\epsilon$ где су $k$-симплекси $k$-торке тачака $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ такве да су сваке две тачке на растојању мањем од $\epsilon$.

Односно долазимо до природног придруживања симплицијалног комплекса подацима (који су елементи еуклидског простора).

# Својства

Рипсов комплекс је јако погодан зато што је у поптуности одређен својим 1-скелетоном. То јест Рипсов комплекс је максималан међу свим симплицијалним комплексима са да датим 1-скелетоном. Осим у анализи података користи се и за моделирање топологије *MANET*-а (*mobile ad hoc network*).

# Пример

## Пример

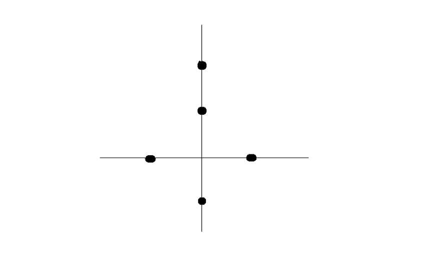
Посматрајмо тачке у равни $(0,-1),(0,1),(0,2),(-1,0),(1,0)$

# Пример

## Пример

Посматрајмо тачке у равни $(0,-1),(0,1),(0,2),(-1,0),(1,0)$

$\mathcal{R}_{\frac{1}{2}}$:

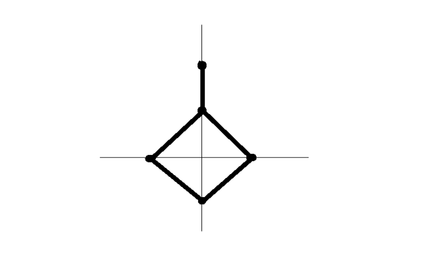


Слика: Рипсов комплекс 1

# Пример

## Пример

$\mathcal{R}_{\frac{3}{2}}$:

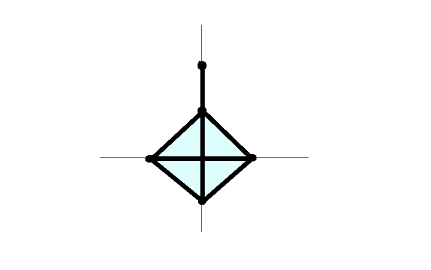


Слика: Рипсов комплекс 2

# Пример

## Пример

$\mathcal{R}_{2.1}$:

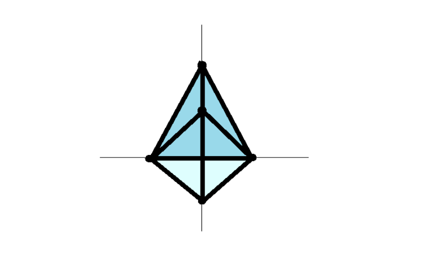


Слика: Рипсов комплекс 3

# Пример

## Пример

$\mathcal{R}_{\frac{5}{2}}$:



Слика: Рипсов комплекс 4

*Хвала на пажњи !*

# Садржај

1 Алгебарска Топологија

2 Персистенција

3 Персистентна Хомологија

4 *Rips*-ов комплекс

5 Литература

# Литература

A. Hatcher.
*Algebraic Topology*.

H. Edelsbrunner. D. Morozov.
Persistant Homology: Theory and Practice

H. Edelsbrunner.
Persistant Homology - a Survay

R. Ghrist.
Barcodes - The Persistant Topology of data.